ریاضی

منبع: قلمچی

۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{x\left(\sqrt{x+۱}+۱\right)}{(\sqrt{x+۱}-۱)(\sqrt{x+۱}+۱)} = \lim_{x\to ۰} \frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{x} = ۲$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۲ گزینه ۲

تابع $f(x) = \frac{\left[x+\frac{۱}{۲}\right]}{x}$ را در نظر می‌گیریم. دامنهٔ این تابع $\mathbb{R} - \{۰\}$ است. اما برای $x \in \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$، $\left[x+\frac{۱}{۲}\right] = ۰$ و درنتیجه $f(x) = ۰$؛
بنابراین: $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ تابستان ۱۳۹۸

۳ گزینه ۳

باتوجه‌به تساوی $(۳b-۲a, ۷) \cup (c, ۲a+b) = (c, ۲a+b) \cup (۳b-۲a, ۷)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۴ \\ ۳b-۲a=۴ \end{cases} \Rightarrow ۴b = ۸ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a+b=۴ \xrightarrow{b=۲} a = ۱$$

بازهٔ (a, b) برابر با $(۱, ۲)$ است که باتوجه‌به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{۴}{۳}$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۴ گزینه ۳

همسایگی چپ ۳ را می‌توان به‌صورت $۲ < x < ۳$ نشان داد، آنگاه $[x] = ۲$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[x]-۱۸}{x[x]-۶} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[۳^-]-۱۸}{x[۳^-]-۶} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲x^۲-۱۸}{۲x-۶}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲(x^۲-۹)}{۲(x-۳)} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{\cancel{۲}(x-۳)(x+۳)}{\cancel{۲}(x-۳)} = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

۵ گزینه ۲

دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$۲-[x]=۰\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\Rightarrow D_f=(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)$$

پس همسایگی راست نقطهٔ $x=۲$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۷

۶ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x+۲}{-۴(x+۱)^۲}=-\infty\Rightarrow -۴x^۲+ax+b\equiv -۴(x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow -۴x^۲+ax+b\equiv -۴x^۲-۸x-۴\xrightarrow{\text{مقادیر نظیر به نظیر}}\begin{cases}a=-۸\\ b=-۴\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\tan \pi x}{ax^۲-۲b}=\lim_{x\to ۱}\frac{\tan \pi x}{-۸x^۲+۸}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\tan(\pi-\pi x)}{-۸(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\tan(-\pi(x-۱))}{x-۱}\right)\left(\frac{۱}{x+۱}\right)=-\frac{\pi}{۸}\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۱۶}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

۷ گزینه ۱

برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت از جملات با درجهٔ بزرگ‌تر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{۳x-|x|}{ax^n}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۴x}{ax^n}=۲\Rightarrow n=۱,\ a=۲$$

چون c عددی حقیقی مخالف صفر است، باید حد مخرج کسر صفر باشد؛ چون حد صورت صفر است.

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۲x+b}=c\Rightarrow ۴+b=۰\Rightarrow b=-۴$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{۲x-۴}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{۸x(x-۲)}{۲(x-۲)(۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸x}{۲(۳x+\sqrt{x^۲+۱۶x})}=\frac{۲}{۳}=c$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۸

۸ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}\times\frac{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos 2x}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{2(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2}=\frac{2}{2}=1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+ax^2-7x+b}=\frac{-1}{12}$$

برای ساده کردن، صورت و مخرج را در $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}_{\text{حد}=3}(x^3+ax^2-7x+b)}=\frac{-1}{12}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+ax^2-7x+b}=\frac{-1}{4}$$

باتوجه‌به آنکه $(x+1)$ در $x=-1$ صفر می‌شود، پس مخرج هم باید عامل $(x+1)$ داشته باشد.

$$\begin{array}{l|l} x^3+ax^2-7x+b & x+1 \\ \hline -(x^3+x^2) & x^2+(a-1)x-(a+6) \\ \hline (a-1)x^2-7x+b & \\ -((a-1)x^2+(a-1)x) & \\ \hline -(a+6)x+b & \\ -(-(a+6)x-(a+6)) & \\ \hline a+b+6=0 \quad (*) & \end{array}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x^2+(a-1)x-(a+6))}=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-(a-1)-(a+6)}=\frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow -2a-4=-4\Rightarrow a=0\xrightarrow{(*)}b=-6$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۱

در محاسبهٔ حد داده‌شده وقتی x به ۳ میل می‌کند، مخرج به صفر میل می‌کند؛ باید صورت هم به صفر میل کند تا جواب حد نامتناهی نشود.

$$۶ - \sqrt{۹ + a} = ۰ \Rightarrow ۶ = \sqrt{۹ + a} \Rightarrow ۳۶ = ۹ + a \Rightarrow a = ۲۷$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{۲x - \sqrt{x^۲ + ۲۷}}{x - ۳} \times \frac{۲x + \sqrt{x^۲ + ۲۷}}{۲x + \sqrt{x^۲ + ۲۷}}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{۴x^۲ - (x^۲ + ۲۷)}{(x - ۳)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۲۷})} = \lim_{x \to ۳} \frac{۳(x - ۳)(x + ۳)}{۱۲(x - ۳)}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{۳(x + ۳)}{۱۲} = \frac{۱۸}{۱۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲۷}{\frac{۳}{۲}} = ۱۸$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۲

$$\lim_{x \to ۰^-} gof(x) = \lim_{x \to ۰^-} g\left(\frac{x + ۱}{x - ۲}\right) = \lim_{x \to (-\frac{۱}{۲})^+} g(x)$$

$$= \lim_{x \to (-\frac{۱}{۲})^+} \frac{۵x + ۱}{۴x^۲ - ۱} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۰^-} = +\infty$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

$$x \to (-۲)^+ \ : \ (-۲)^+ \simeq (-۱/۹) \Rightarrow \left[(-۱/۹)^۲\right] = \left[۴^-\right] = ۳$$

$$x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \, , \, -۲$$

x		-۲		۱	
$x^۲ + ۳x + ۲$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$x \to (-۲)^+ \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۲ < ۰$$

$$\lim_{x \to (-۲)^+} \frac{\left[x^۲\right] - x - ۵}{|x^۲ + ۳x + ۲|} = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{۳ - x - ۵}{-(x^۲ + ۳x + ۲)}$$

$$= \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{-۲ - x}{-(x^۲ + ۳x + ۲)} = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{۲ + x}{(۲ + x)(۱ + x)} = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{۱}{۱ + x} = -۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۱۳ گزینه ۴

$$x^{۶} - ۶۴ = (x+۲)\underbrace{\left(x^{۵} - ۲x^{۴} + ۴x^{۳} - ۸x^{۲} + ۱۶x - ۳۲\right)}_{p(x)}$$

$$A = -۲ - ۸ - ۳۲ = -۴۲$$
$$B = ۱ + ۴ + ۱۶ = ۲۱$$
$$۲B - A = ۴۲ + ۴۲ = ۸۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۴

$$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \quad ; \quad r = p(۳ - ۲) + ۴ = ۷ \Rightarrow p(۱) = ۳$$
$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$
$$\Rightarrow g(-۱) = (-۱)^{۱۶} + ۵p(۱) - m = ۱ + ۱۵ - m = ۰ \Rightarrow m = ۱۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۳

$$p(x) = x^{۷} - ۳x^{۴} + ax - ۱ = (x-۱)q(x) + ۲ \Rightarrow p(۱) = ۲ \Rightarrow a = ۵$$
$$\Rightarrow p(x) = x^{۷} - ۳x^{۴} + ۵x - ۱ = (x-۱)q(x) + ۲$$
$$\Rightarrow p(-۱) = -۲q(-۱) + ۲ \Rightarrow q(-۱) = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{۲}}{x^{۲}} = ۱$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱} = ۱ + \frac{۲}{x^{۲}-۱}$$

یعنی اگر $x \to +\infty$، تابع f با مقادیر بیشتر از ۱ ، به ۱ میل می‌کند و درنتیجه تابع g با مقادیر کمتر از ۱ ، به ۱ میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} (fog)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = \lim_{t \to ۱^-} f(t) = -\infty$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۱۷ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه بیشترین توانی که معلوم است عدد ۳ است، با مقایسهٔ m و n با عدد ۳ داریم:

$$m = n = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۳ + ۲x^۳}{۲x^۳}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a+۲)x^۳}{۲x^۳} = ۳ \Rightarrow \frac{a+۲}{۲} = ۳ \Rightarrow a = ۴ \xrightarrow{n=۳} a + n = ۷$$

$$m = n > ۳ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{۲x^m} = \frac{a}{۲} = ۳ \Rightarrow a = ۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ n > ۳ \end{cases} \Rightarrow a + n > ۹$$

لذا گزینهٔ "۳" در هیچ شرایطی رخ نمی‌دهد.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۱۸ گزینه ۲

صورت و مخرج عبارت داده‌شده به ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ صفر می‌شود، پس باید کسر رفع ابهام شود، یعنی صفر کننده‌های صورت و مخرج را باهم ساده کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج رادیکالی صورت ضرب کنیم:

$$\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{۱}{\tan}}}{\cos ۲x} = \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x} \times \frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}$$

$$= \frac{\tan x - \frac{۱}{\tan x}}{\cos ۲x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\cos ۲x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}})}$$

$$= \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos ۲x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}})(\cos x . \sin x)}$$

با جایگذاری رابطهٔ $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$، کسر بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{-۱}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}})(\cos x . \sin x)}$$

حال حد خواسته‌شده به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{۱}{\tan x}})(\cos x . \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{(\sqrt{\tan\frac{\pi}{۴}} + \sqrt{\frac{۱}{\tan\frac{\pi}{۴}}})(\cos\frac{\pi}{۴} . \sin\frac{\pi}{۴})} = \frac{-۱}{(۱+۱)(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{۲ \times \frac{۱}{۲}} = -۱$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{b-x^۲}{۱-\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}\frac{b-۱}{۰}$$

ازآنجاکه جواب حد باید عدد صحیح k شود، پس صورت کسر چاره‌ای به‌جز صفر شدن ندارد! (در غیر این صورت، جواب حد، نامتناهی خواهد بود)

$$\Rightarrow b-۱=۰\Rightarrow b=۱$$

حال که صورت و مخرج صفر شد، باید رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x^۲}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x^۲)(۱+\sqrt{x})}{۱-x}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(۱-x)}(۱+x)(۱+\sqrt{x})}{\cancel{۱-x}}=۲\times ۲=۴$$

پس $k=۴$ بوده است و داریم:

$$b-k=۱-۴=-۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۴

توجه کنید که باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ و $x+۱$ به ترتیب برابر با $p(۲)$ و $p(-۱)$ است؛ پس:

$$\begin{cases}p(۲)=۸-۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a-۲b=۹\\ p(-۱)=-۱-a-b+۱=۰\Rightarrow a+b=۰\end{cases}\Rightarrow b=-\frac{۳}{۲}\ ,\ a=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow p(x)=x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۳}{۲}x+۱$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $۲x-۱$ برابر با $p\left(\frac{۱}{۲}\right)$ است.

$$p\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)-\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۱=۰$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۴

$$\left(\frac{x}{x-۱}\right)\xrightarrow{x\to ۱^-\text{ اگر }}\left(\frac{x}{x-۱}\to -\infty\right)$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{|\tan\pi x|}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\tan\pi x}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\tan(\pi x-\pi)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\pi(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{\pi}{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

۲۲ گزینه ۱

تابع در $x = ۲$ نامتناهی می‌شود، پس $x = ۲$ ریشهٔ مخرج است. ازطرفی تابع در $x = ۳$ حد دارد ولی مقدار ندارد، پس $x = ۳$ هم ریشهٔ صورت و هم ریشهٔ مخرج است. مخرج کسر به‌صورت $(x-۲)(x-۳) = x^۲ - ۵x + ۶$ می‌باشد، پس $c = -۵$ و $d = ۶$.

$$۲x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۳} ۱۸ + ۳a + b = ۰ \Rightarrow ۳a + b = -۱۸ \quad (۱)$$

حاصل حد در $x = ۳$ برابر ۷ است. برای محاسبهٔ حد باید صورت و مخرج را بر $(x-۳)$ تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲x^۲ + ax + b}{(x-۲)(x-۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{۲x + ۶ + a}{x-۲} = ۷ \Rightarrow \frac{۱۲ + a}{۱} = ۷$$

$$\Rightarrow a = -۵ \xrightarrow{(۱)} ۳a + b = -۱۸ \Rightarrow b = -۳$$

$$ab + cd = (-۳)(-۵) + (-۵)(۶) = ۱۵ - ۳۰ = -۱۵$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۳ گزینه ۲

$$p(x) = (x+۱)(x+۲)q(x) + ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x-۱) = x(x+۱)q(x-۱) + ۲x - ۱ \\ p(x-۲) = x(x-۱)q(x-۲) + ۲x - ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x-۱) - p(x-۲) = x[(x+۱)q(x-۱) - (x-۱)q(x-۲)] + ۲$$

درنتیجه باقی‌ماندهٔ تقسیم موردنظر برابر با ۲ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۲۴ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار اولاً مخرج یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد که با دقت به ضرایب می‌توان حدس زد $۴x^۲ - ۴x + ۱$ است و یا به‌صورت زیر مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴(۴)(۱) = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} b = ۴ & \text{غ.ق.ق} \\ b = -۴ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

چون جواب حد $(+\infty)$ شده، پس لازم است صورت کسر به ازای ریشهٔ مخرج یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ یک عدد مثبت باشد:

$$۲(\frac{۱}{۲}) + a > ۰ \Rightarrow ۱ + a > ۰ \Rightarrow a > -۱$$

باتوجه‌به گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۲ می‌تواند درست باشد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۴

در همسایگی $x = ۳$، صورت مقداری مثبت دارد و چون حاصل حد $+\infty$ شده است، باید مخرج نیز در همسایگی $x = ۳$ مقداری مثبت داشته باشد و ازطرفی $x = ۳$ ریشهٔ آن باشد، پس $x = ۳$ ریشهٔ مضاعف آن است؛ درنتیجه:

$$(x-۳)^۲ = x^۲ + ax + b + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ = x^۲ + ax + b + ۱$$
$$\Rightarrow a = -۶\ ,\ b + ۱ = ۹ \Rightarrow b = ۸ \Rightarrow a + b = -۶ + ۸ = ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

ازآنجایی‌که حاصل حد عددی غیرصفر شده است؛ بنابراین باید درجه‌های صورت و مخرج باهم برابر باشند. لذا دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت $n < ۵$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|۳a|\,x^۵ - ax^n + ۷x^۲ - ۲}{۴x^۵ + ۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|۳a|\,x^۵}{۴x^۵} = \frac{|۳a|}{۴} = ۱$$
$$\Rightarrow |۳a| = ۴ \Rightarrow a = \pm\frac{۴}{۳}$$

حالت $n = ۵$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|۳a|\,x^۵ - ax^۵ + ۷x^۲ - ۲}{۴x^۵ + ۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(|۳a| - a)x^۵}{۴x^۵} = \frac{|۳a| - a}{۴} = ۱$$
$$\Rightarrow |۳a| = ۴ + a \Rightarrow \begin{cases} ۳a = ۴ + a \Rightarrow a = ۲ & \text{ق.ق} \\ ۳a = -۴ - a \Rightarrow a = -۱ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$\frac{۴}{۳} - \frac{۴}{۳} + ۲ - ۱ = ۱$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to۰^-} \frac{x\left(۲[۰^-] + ۲x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)}{\cos ۲x - ۱} = \lim_{x\to۰^-} \frac{x\left(-۲ + ۲x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)}{-۲\sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to۰^-} \frac{x\left(-۲ + ۲x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)}{-۲x^۲} = \lim_{x\to۰^-} \frac{-۲ + ۲x\left[\frac{۱}{x}\right]}{-۲x}$$

$$= \lim_{x\to۰^-} \frac{-۲}{-۲x} + \frac{۲x\left[\frac{۱}{x}\right]}{-۲x} = \lim_{x\to۰^-} \frac{۱}{x} - \left[\frac{۱}{x}\right] \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

نکته: توابع متناوب $u - [u]$ وقتی u به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، حد ندارند.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار، $k < ۰$ است. ازطرفی وقتی $x \to k^+$، آنگاه $f(x) \to ۱^+$؛ بنابراین:

$$\lim_{x \to k^+} \frac{x}{۱ - f(x)} = \frac{k}{۰^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-} = +\infty$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۳

برای آنکه بازهٔ داده‌شده یک همسایگی عدد ۳ باشد، باید داشته باشیم:

$$a - ۱ < ۳ < ۲a + ۳ \Rightarrow \begin{cases} a - ۱ < ۳ \\ ۳ < ۲a + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < ۴ \\ ۰ < a \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰ < a < ۴$$

بنابراین مجموعه مقادیر قابل‌قبول a برابر است با $۰ < a < ۴$ و بیشترین مقدار صحیح a برابر با ۳ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

۳۰ گزینه ۴

عدد یک عضو بازهٔ $(a - ۲, ۳a + ۲)$ است، پس:

$$\begin{cases} a - ۲ < ۱ \Rightarrow a < ۳ \\ ۳a + ۲ > ۱ \Rightarrow a > -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{۳} < a < ۳$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۷